УДК 539.3

О.М. Шевченко

МОДЕЛЮВАННЯ БАГАТОШАРОВИХ АЕРОДРОМНИХ ПОКРИТЬ НА ОСНОВІ ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНОГО МЕТОДУ ПОТЕНЦІАЛУ

Інститут екології і дизайну НАУ, e-mail: ikey@ua.fm

Розглянуто проблеми врахування розподільних властивостей багатошарових аеродромних покрить на пружній основі, що ігноруються в найпростішому випадку вінклерівської основи. Наведено апарат реалізації чисельно-аналітичного методу потенціалу при аналізі напружено-деформованого стану багатошарового покриття, що складається з двох ізотропних шарів з розділовим прошарком між ними.

Визначення параметрів напружено-деформованого стану покриття

Практика проектування, будівництва й експлуатації покрить показує, що їхня несуча здатність, надійність і напружено-деформований стан визначаються впливом конструктивних особливостей покриття в цілому [1].

Математичні моделі, що враховують усі конструктивні особливості і фактори, поки не розроблені. Тому обмежуються спрощеними моделями (необмеженими або плоскими напівобмеженими областями, конструкціями блокового типу), що дозволяють розглянути поводження і напружено-деформований стан покрить з урахуванням конструктивних особливостей і зовнішніх факторів.

Одержати аналітичні рішення для двошарових покрить при всьому різноманітті граничних умов і способів завантаження неможливо. Ця обставина обумовлює необхідність застосування чисельних методів. Однак одержання чисельних рішень навіть великої кількості задач з конкретними граничними умовами і коефіцієнтами диференціальних рівнянь не завжди дає можливість установити ступінь впливу змін сукупності вихідних параметрів на напружено-деформований стан розглянутих конструкцій. Тому в теоретичних дослідженнях найчастіше застосовується "змішаний" метод, що полягає в пошуку аналітичних рішень задач про напружено-деформований стан конструкцій для простих областей або спрощених схем, типу балкових, які уточнюються для більш складних умов чисельними методами. Такий підхід вимагає строгого математичного формулювання для спрощених моделей. Побудувати математичну модель, що враховує всі особливості роботи покриття, сьогодні неможливо, тому що складно точно сформулювати модельні передумови для опису всього спектра природних і фізичних процесів, що відбуваються в покриттях при впливі експлуатаційних навантажень у різні періоди року.

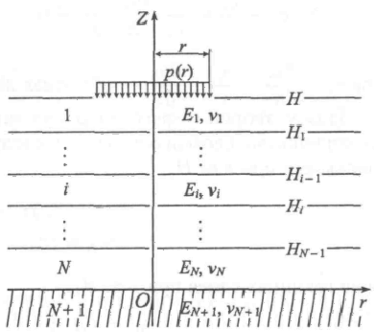
Отже, весь комплекс задач, пов'язаних з визначенням параметрів напружено-деформованого стану аеродромного покриття, традиційно поділяється на ряд незалежних груп.

Перша група задач дозволяє досліджувати вплив зміни фізико-механічних властивостей матеріалів шарів покриття і підстави, у тому числі з урахуванням зміни параметрів тепловологого стану ґрунту, на параметри напружено-деформованого стану покриття.

Друга група задач спрямована на вивчення впливу на параметри напружено-деформованого стану конструктивних особливостей шарів покрить. Тут зберігаються рамки представлень про тверде покриття як про багатошарову плиту, де несучі шари є пластинами Кірхгофа–Лява, а прошарки, що вирівнюють, – вінклеровським шаром.

Третя група задач пов'язана з визначенням залежності між фізико-механічними характеристиками матеріалів покриття і підстави та параметрів їх тепловологого стану.

Однак інженерна практика показує, що перераховані спрощені моделі не забезпечують необхідну точність чисельного моделювання реальних твердих багатошарових аеродромних покрить (див. рисунок), тому необхідно використовувати більш точні просторові розрахункові схеми, у загальному випадку засновані на функціональних співвідношеннях нелінійних задач.



Розрахункова схема багатошарового півпростору

Основні положення чисельно-аналітичного методу потенціалу

Реалізація методу потенціалу [2] у початковому варіанті розрахунку багатошарових аеродромних покрить та основ заснована на використанні основних гіпотез теорії пружності. При цьому маємо справу з виразами, що складаються зі значного числа компонентів, скомпонованих відповідно до точних законів, із залученням умов рівноваги, параметрів напруженого і деформованого станів пружного середовища, геометричного опису границь і внутрішніх середовищ та розподілу за ними функцій.

При використанні методу потенціалу в статичних задачах теорії пружності використовують тотожність Сомільяни для переміщень, як взаємне із сингулярним рішенням Нав'є. Фундаментальні рішення цього рівняння дають значення потенціалу від дії на поле одиничного джерела.

Крім рішення рівняння Нав'є, існують інші сингулярні рішення. Перше з них збігається з отриманим Кельвіном фундаментальним рішенням для тривимірної задачі.

До другого класу фундаментальних рішень відносяться задачі для півпростору, для яких були отримані не тільки напруги, але й еквівалентні їм переміщення від дії зосереджених одиничних навантажень, прикладених у середині півпростору. Уведення додаткових виразів дозволило задовольнити умову обернення в нуль напруг на поверхні півпростору.

При рішенні задач про взаємодію багатошарових плит із пружною основою використовують рішення другого класу задач, оскільки тиск від плит прикладається не тільки до поверхні, але також поширюється на деяку глибину в середину масиву ґрунту.

До третього класу фундаментальних задач відноситься рішення Буссинеска, отримане при дії зосередженої сили на межі пружного півпростору, обмеженого площиною.

Усі наведені класи сингулярних рішень є функціями декартових координат точки додатка навантаження і точки спостереження.

Таким чином, три компоненти переміщень і дев'ять компонентів напруг у точці відповідають трьом компонентам зосередженої сили. Від цієї функції залежить вектор напруг, що проходить через межову точку, у якій проведена зовнішня нормаль. У результаті одержують переміщення і напруги, що відображають загальний ефект від дії вектора фіктивних напруг, розподіленого по поверхні. Однак дійсні значення їхніх рішень досить просто визначаються тільки тоді, коли точка додатка навантаження і точка спостереження не збігаються.

Скориставшись тотожністю Сомільяни і фундаментальним рішенням для півпростору, одержують межове рішення. Воно справедливо як для двовимірної, так і для тривимірної задачі і являє собою співвідношення, що має виконуватися між переміщеннями і напругами на поверхні, а також об'ємними силами. При заданих граничних умовах ця рівність являє собою граничне інтегральне рівняння щодо функцій на межі, оскільки об'ємні сили завжди відомі. Саме ця обставина дозволяє зробити акцент на цьому рівнянні і залучити до його дослідження числові методи [2].

Для визначення напруг у внутрішніх точках пластичного середовища необхідно одержати рішення більш високого рангу.

Процедура рішення задач про взаємодію плит і багатошарових основ є окремою для широкого класу задач механіки твердого тіла. Їхнє поводження описується граничними інтегральними рівняннями, але на практиці замість його дозволу використовують чисельній підхід – це пояснюється тим, що аналітичне рішення можна одержати тільки для тіл простої геометрії і нескладних граничних умов.

Для одержання щільностей фундаментальних рішень використовують окреме рішення для задачі про зосереджену силу усередині півпростору, що автоматично задовольняє граничним умовам на вільній від напруг поверхні. При чисельній реалізації необхідно дискретизувати поверхні взаємодій шарів плити і ґрунту.

Чисельний підхід у методі потенціалу може складатися з таких етапів:

– межа поділяється на ряд елементів, на яких межові переміщення і зусилля задаються за допомогою інтерполяційних функцій за значеннями функцій у вузлах елементів;

– інтегральне граничне рівняння записується в дискретній формі для кожного вузла граничної поверхні, у якому додається навантаження;

– обчислюються інтеграли по кожному граничному елементу на основі виведених аналітичних формул або використовуються відомі схеми чисельного інтегрування, у результаті одержують систему з лінійних алгебраїчних рівнянь;

– додають граничні умови відповідної крайової задачі за значеннями вузлових величин, і всі інші значення переміщень і напруг у вузлах визначаються в результаті рішення системи рівнянь і реалізації аналогових інтегральних співвідношень для окремих компонентів напружено-деформованого стану.

У загальному випадку граничні елементи можуть бути постійними, лінійними, квадратичними і більш високого порядку. Якщо розглядається тривимірна задача про опір багатошарової плити вертикальним навантаженням, то граничні елементи по поверхні будуть представлені лінійними елементами, у яких невідомі напруги і переміщення задаються у вигляді плоского фрагмента у вузлах його дискретизації.

У найпростішому варіанті дискретизації поверхні використовуються постійні щільності: напруги і переміщення. Поліномінальні елементи описують криволінійні зміни невідомих за вузлами.

Серед різних типів елементів, що застосовуються при чисельному рішенні дискретного аналога інтегрального рівняння, лінійні елементи дозволяють одержати необхідну точність рішення, не вимагаючи значних зусиль з погляду числової реалізації.

Інтеграли граничного рівняння у випадку апроксимації лінійними елементами будуть трохи складніше, ніж у варіанті постійних елементів, оскільки функції в довільній точці елемента можна визначити через їхні значення в крайніх вузлах за допомогою двох функцій, що інтерполюють, і однорідної координати з урахуванням внеску. Це враховує внесок вузлів сусідніх елементів при формуванні матриці. У ряді випадків доцільно інтеграли в межах головного елемента визначати аналітично і чисельно – на інших елементах.

Розрахунки різних лінійно-деформівних об’єктів можуть виконуватися при використанні єдиної схеми реалізації чисельного методу потенціалу. Якщо фізичні характеристики не залежать від напруженого стану тіла, то при будь-яких ізотропних і анізотропних моделях можливість повного дослідження обумовлюється тільки наявністю відповідного типу фундаментального рішення.

Розрахунки елементів конструкцій, у яких виникають нелінійні деформації, доцільно робити на підставі широких узагальнень принципу взаємності.

Багатошарову плиту можна розглядати у вигляді складеної розрахункової моделі, у якій фрагменти характеризуються різними механічними властивостями. Передбачається, що на конструкцію діє поступово зростаюче навантаження, а напружений стан матеріалу відповідає теоремі про просте завантаження. Тоді, залежно від використаних гіпотез нелінійного деформування, при перевищенні заданого критерію в деяких зонах починають розвиватися пластичні деформації.

В області фізично-нелінійних деформацій матеріал вважається практично нестисливим. Тоді залежність між компонентами деформацій і напруг представляється при заміні постійних модулів пружності першого і другого роду відповідними змінними січними модулями. Об’ємна деформація подається в крапці за допомогою кульових тензорів напруг і деформацій, а формозміна в околицях тієї самої крапки залежить від девіаторів напруг і деформацій, що записуються у вигляді матриць. Напружено-деформований стан у кожній крапці характеризується за допомогою інтенсивностей напруг і деформацій, пов’язаних з октаедричними компонентами.

Основні закони пружності узагальнюються у разі розгляду пружно-пластичних деформацій твердих тіл:

– закон зміни обсягу, що відповідає узагальненому законові Гука, установлює пряму пропорційність між кульовими тензорами напруг і деформацій при постійному модулі об’ємної деформації як у межах, так і за межами пружності;

– закон зміни форми при активній деформації у випадку простого завантаження в кожній точці тіла записується у вигляді, що має найбільше значення для побудови рішення за методом потенціалу;

– функція, що залежить тільки від матеріалу тіла, представляє закон узагальненої напруги з узагальненою деформацією при активному навантаженні;

– закон пасивної деформації припускає, що при простому розвантаженні пружно-пластичного тіла воно може вважатися лінійно-пружним.

Перші три закони зберігають свою силу й у більш загальних варіантах нелінійного напружено-деформованого стану. Головні передумови розрахунку визначаються на підставі діаграми розтягання – стиску. У випадку складнонапруженого стану така діаграма являє собою взаємозв’язок між інтенсивностями напруг і деформацією залежно від функції інтенсивності деформацій, що відрізняється від нуля тільки в пластичній області.

При виведенні співвідношень методу потенціалу для розрахунку багатошарових плит, в яких виникають нелінійні деформації, допоміжні стани будуються шляхом виділення досліджуваної області з відповідного лінійно-пружного середовища нескінченної або напівнескінченної довжини.

Для досліджуваної плити і основи основний напружено-деформований стан у загальному випадку характеризується пружно-пластичною деформацією.

Інтеграл, обумовлений у межах усієї деформованої багатошарової плити, може інтерпретуватися як робота деяких додаткових масових сил, що виникають тільки в області пластичних деформацій, тому можна побудувати алгоритм послідовних пружних рішень, що є модифікацією загального методу А.А. Іллюшина [2].

На першому етапі рішення розглядається лінійно-пружна задача при нульовому переміщенні, у результаті визначаються невідомі компоненти напружено-деформованого стану на межі області.

Для визначення області пластичних деформацій усередині плити задається мережа інтерполяційних вузлів нерегулярної структури, тому що в зонах концентрації очевидна необхідність згущення крапок.

Шляхом застосування інтегральних представлень у всіх визначених характерних точках визначаються компоненти тензора напруг і знайдені значення використовують для обчислення величини інтенсивностей напруг.

На другому етапі розрахунку знову вирішується пружно-лінійна задача з обчисленням додаткових навантажень, що з'явилися, і визначаються нові значення невідомих щільностей еластопотенціалів та величини характерних компонентів і уточнюються зони розвитку пластичних деформацій.

На наступних етапах обчислювальні операції продовжуються за наведеним вище алгоритмом. Процес послідовних пружних рішень проводиться доти, поки різниця результатів двох сусідніх наближень не стане менше заданого відхилу обчислень.

Слід зазначити, що розв'язання задачі в деяких випадках може бути спрощене при використанні розрахункової моделі складеного тіла, що апроксимує об'єкт, у якому спостерігається розвиток пружно-пластичних деформацій.

Очевидно, що наведена схема рішення з залученням послідовних наближень є основним алгоритмом для розв'язання задач інших класів, де враховується не тільки ітераційна зміна структури тіла, але і функціональна крокова залежність навантаження від часу.

У плитах при вигині найбільш напружені крайні поверхневі волокна, отже, пластичні деформації у випадку поступового збільшення навантаження будуть утворюватися в крайніх волокнах, а потім поступово поширюватися на всю товщину плити.

Висновки

Застосування найпростіших методів будівельної механіки й опору матеріалів дозволяє одержати лише грубі оцінки характеристик міцності складних конструкцій.

Для детального аналізу складної конструктивної несучої структури твердих багатошарових аеродромних покрить доцільно скористатися універсальними чисельними методами. Одним із найбільш ефективних методів сучасної будівельної механіки є чисельно-аналітичний метод потенціалу.

Список літератури

1. *Кульчицкий В.А.* Аэродромные покрытия. Современный взгляд. – М.: Физматлит, 2002. – 528 с.
2. *Верюжский Ю.В.* Численные методы потенциала в некоторых задачах прикладной механики. – К.: Вища шк., 1978. – 184 с.

Стаття надійшла до редакції 11.10.04.

О.Н. Шевченко

Моделирование многослойных аэродромных покрытий на основе численно-аналитического метода потенциала

Рассмотрены проблемы учета распределительных свойств многослойных аэродромных покрытий на упругом основании, которые игнорируются в простейшем случае винклеровского основания. Приведен аппарат реализации численно-аналитического метода потенциала при анализе напряженно-деформированного состояния многослойного покрытия, состоящего из двух изотропных слоев с разделительной прослойкой между ними.

O.M. Shevchenko

Multilayer airdrome pavement modeling on the base of numeically-analythical method of potential

There are problems of the take into account the multilayered foundation distributive properties which are ignored in the elementary case of Winkler foundation at calculation of constructions on the elastic foundation. In article the apparatus realization of numerically-analytical method of potential for a problem about stress and strain state analysis is considered for the multilayered pavement consisting from two isotropic layers with a separating layer between.